対称空間上の境界値問題 (対称空間上の不変微分方程式)

AUTHOR(S):
岡本, 清郷

数理解析研究所講究録
249巻 1975年 1-9

対称空間上の境界値問題

広大 理学部　岡本清郷

$\mathbb{R}^2$ の x 軸上の一点 $(x_0, 0)$ の近くに於いて

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

なる初期値問題を考える。このときよく知られているように real analytic category では常に解けるが，C^∞-category では一般には解けない。という訳でこの問題を放棄してしまったのでは，代数方程式論でいえばアーベルの時代でストップということに対応する。やはりガロアにならって，解けるための φ_0, φ_1 の満たすべき条件その他の研究をすべきであろう。勿論上記の例についてはこれらは完全に分っているがそれを一般に拡張した場合（これは拡張する方向

にもよるが）の研究は特に対称空間上の不変微分方程式については"micro-local analysis"という強力な武器の出現によって一大進歩を遂げた。

さて，上の例は Cayley 変換によって

$$X = \{ z \in \mathbb{C} ;\ |z| < 1 \},\ \partial X = \{ z \in \mathbb{C} ;\ |z| = 1 \}$$

とおくとき，

$$\Delta u = 0$$

$$\begin{cases} u|_{\partial X} = \varphi_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\partial X} = \varphi_1 \end{cases}$$

$$(\text{但し } z = re^{i\theta})$$

という形になる。この初期値問題が解けるためには φ_0, φ_1 が一般には或る種の関係を満たすべきだという事実は，大域的解を考察するとき更に明確になる。即ち大雑把にいえば，X 全体上の解 u はその境界値 φ_0 のみによって一意的に定まり X 上の調和関数全体と ∂X 上の超関数全体とが1対1に対応する（ディリクレ問題）。その際ノイマン問題を考えれば φ_1 は φ_0 によって一意的に決定されることが分る。∂X 上の超関数と X 上の調和関数との対応はポアッソン積分で与えられこのポアッソン積分を一般に拡張するためには上記の方程式

$$\Delta u = 0$$

を方程式

$$-(1-|z|^2)^2\Delta u = \lambda u \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

の特別な場合（つまり $\lambda=0$）と見做すのが自然であるということは今迄何度も強調して来たがそれは微分作用素

$$P_\lambda = -(1-|z|^2)^2\Delta - \lambda$$

が X の自己同型群により不変であり従ってその表現論を援用出来るからである。即ち上記の φ_0, u, φ_1 の間の対応はリー群 $SL(2,\mathbb{R})$ の X, ∂X への自然な作用に関し, equivariant であり従って対応 $\varphi_0 \longmapsto \varphi_1$ は ∂X 上で実現される $SL(2,\mathbb{R})$ の principal series (non-unitary) の表現の間の "intertwining operator" となる。この intertwining operator を $A_\bullet$ とかくと,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^{P_0}(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\partial X)\oplus\mathcal{B}(\partial X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\partial X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Psi & & \Psi & & \Psi & & \\
 & & u & \longmapsto & (\varphi_0,\varphi_1) & \longmapsto & A_\bullet\varphi_0-\varphi_1 & &
\end{array}$$

なる exact sequence が得られる。但し $\mathcal{A}^{P_0}(X)$ は X 上の調和関数の空間, $\mathcal{B}(\partial X)$ は ∂X 上の超関数の空間を表わす。

今, $s^2+1=\lambda$ を満たす複素数 s を1つ固定し s に対応する spherical principal series から $-s$ に対応する spherical principal series の表現への intertwining operator を A_s とかくと, $is \notin \mathbb{Z}$ のとき

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathcal{A}^{P_\lambda}(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\partial X)\oplus\mathcal{B}(\partial X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\partial X) & \longrightarrow 0 \\
& \Psi & & \Psi & & \Psi & \\
& u & \longmapsto & (\varphi_s, \varphi_{-s}) & \longmapsto & A_s\varphi_s - \varphi_{-s} &
\end{array}
$$

なる exact sequence が得られる。但し $u \longleftrightarrow \varphi_s$, $u \longleftrightarrow \varphi_{-s}$ は夫々 parameter s, $-s$ に対するポアッソン積分で与えられる。($\mathcal{A}^{P_\lambda}(X)$ は X 上での $P_\lambda u=0$ の解全体)

$$
0 \longrightarrow \mathcal{B}(\partial X) \longrightarrow \mathcal{A}^{P_\lambda}(X) \longrightarrow 0
$$

なる exact sequence がポアッソン積分により与えられること、およびその ~~対~~ 対称空間への拡張については、「ランク1の対称空間上のディリクレ問題」(峰村—田中—岡本)の稿を参照されたい。この onto の証明にはその逆写像即ち $P_\lambda u=0$ の解 u に対しその境界値を対応させる写像を考えることが必要になる。

さて、∂X の任意の点 z とその $\mathbb{C}$ での開近傍 U に対し $U\cap X$ 上での $P_\lambda u=0$ の解 u の全体を $\mathcal{A}^{P_\lambda}(U\cap X)$ とかき、

$$
\mathcal{A}^{P_\lambda}_z = \varinjlim_{U \ni z} \mathcal{A}^{P_\lambda}(U\cap X)
$$

により ∂X 上の sheaf $\mathcal{A}^{P_\lambda}$ を定義する。このとき、境界値を対応させる写像

$$
0 \longrightarrow \mathcal{A}^{P_\lambda} \longrightarrow \mathcal{B}\oplus\mathcal{B}
$$

が定義される。この写像の定義および一般の対称空間への拡張については，「対称空間における境界値問題について」（大島）の稿を参照されたい。最初に述べた問題は「この写像の像を調べよ」という形で定式化される。2つの境界値の間の関係は real analytic category では全然存在しないということからも分るように modulo $\mathcal{A}$ で与えられ，或る invertible micro-local operator A が存在して

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^{P_\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{B}\oplus\mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}/\mathcal{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \Psi & & \Psi & & \\
 & & & & (\varphi_1,\varphi_2) & \longmapsto & A\varphi_1-\varphi_2 & &
\end{array}
$$

なる exact sequence が成立することが昨年佐藤－河合－柏原氏によって証明されたがこの A は上記の A_s を超局所化することによって得られる。このことから一般に，“境界値達の満たすべき必要十分条件は intertwining operators によって与えられるであろう”と予想される。実際，$SO_0(n,1)/SO(n)$ に対しては，柏原氏によってこれが正しいことが証明されている。$SU(n,1)/U(n)$ に対しては intertwining operator が micro-local operator であること迄分っているが上の予想は未解決である．$SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$，$Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$ 等 rank が高くなると intertwining operator は

micro-local operator にならないので，上記の佐藤–河村–柏原氏による定式化は，修正を要するが，どのように修正すべきか今のところ分っていない。

次に大域的問題に対する一般化について述べる。

Gを非コンパクトかつ連結な実半単純リー群とし，Kをその極大コンパクト部分群の一つとする。$G=KAN$を岩沢分解の一つとし，A，Nのリー環を夫々$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{n}$とする。$\rho(H)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}(H)|_{\mathfrak{n}}$ $(H\in\mathfrak{a})$により$\rho\in\mathfrak{a}^*$を定義し，$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$の任意の元$\lambda$に対し

$$\Phi_\lambda(g)=\int_K e^{(i\lambda-\rho)(H(gk))}dk$$

とおく。但しGの元xに対し$\exp H(x)$によってxのA成分を表わし，dkはKの正規化されたハール測度を表わす。X上の不変微分作用素のなすalgebraを$\mathbb{D}(X)$とかくとき，或る$\chi_\lambda\in\mathrm{Hom}(\mathbb{D}(X),\mathbb{C})$ (alg. homo.)が存在して

$$D\Phi_\lambda=\chi_\lambda(D)\Phi_\lambda \qquad (D\in\mathbb{D}(X))$$

が成立する。$\chi_\lambda(D)$はλについて$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$上の多項式であり，$\chi_\lambda=\chi_\mu$ $(\lambda,\mu\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})$が成り立つための必要十分条件は$\lambda=w\mu$を満たすWeyl群$W$の元$w$が存在することである。$A$の$K$に於ける中心化群を$M$とし

$P = MAN$ とおくと P は G の極小パラボリック部分群である。P の指標 $P \ni man \longmapsto e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)} \in \mathbb{C}^*$ に随伴した G/P 上の line bundle を L_λ とかく。
L_λ の hyperfunction sections 全体を $\mathcal{B}(L_\lambda)$ で表わし $\mathcal{B}(L_\lambda)$ の元 φ に対し

$$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(x) = \int_K \varphi(xk)\,dk \qquad (x \in G)$$

によりポアッソン積分 $\mathcal{P}_\lambda$ を定義すると，$\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(L_\lambda)$ の元を

$$\mathcal{A}(G/K)^{\mathcal{M}_\lambda} = \{ f \in \mathcal{A}(G/K)\ ;\ f \text{ は } \mathcal{M}_\lambda \text{ の解} \}$$

$$\left(\text{但し } \mathcal{M}_\lambda\ ;\quad Du = \chi_\lambda(D)u \quad (D \in \mathbb{D}(X))\right)$$

の元に写すことが証明出来る。

このとき次のことが予想される。以下 $i\lambda$ は整形式でないとする。

(予想A) $0 \longrightarrow \mathcal{B}(L_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{P}_\lambda} \mathcal{A}(G/K)^{\mathcal{M}_\lambda} \longrightarrow 0$

は exact.

(予想B) $0 \longrightarrow \mathcal{A}(G/K)^{\mathcal{M}_\lambda} \longrightarrow \bigoplus_{w \in W} \mathcal{B}(L_{w\lambda}) \longrightarrow \bigoplus_{1 \neq w \in W} \mathcal{B}(L_{w\lambda}) \longrightarrow 0$

$$u \longmapsto \sum_{w \in W} \varphi_w \longmapsto \sum_{1 \neq w \in W} (A_w \varphi_1 - \varphi_w)$$

は exact.

但し $\mathcal{P}_{w\lambda}\varphi_w = u$ でかつ A_w は L_λ から $L_{w\lambda}$

への 0 でない intertwining operator.

予想 B) は予想 A) および intertwining operator の一次元性から出る。又予想 A) は次の予想 C) から出る。

予想 C) $\mathcal{A}(G/K)^{\mathfrak{M}_\lambda}$ の元 u に対しその境界値 $\mathcal{B}(L_\lambda) \ni \gamma_\lambda(u)$ を対応させる写像 γ_λ が存在して次を満たす。

1) γ_λ は G-equivariant.

2) $\gamma_\lambda \circ \mathcal{P}_\lambda = id.$

3) $\gamma_\lambda \circ \int_K f(kx)dk = \int_K (\gamma_\lambda f)(kx)dk.$

予想 C) の仮定の下に予想 A) が成立することを証明しよう。$\mathcal{P}_\lambda$ が onto であることをいうには 2) から γ_λ が 1対1 であることをいえばよい。$\gamma_\lambda(f) = 0$ を満たす $0 \neq f \in \mathcal{A}(G/K)^{\mathfrak{M}_\lambda}$ が存在したと仮定して矛盾があることをいう。γ_λ は G-equivariant だから、$f(e) = 1$ としてよい。

$$F(x) = \int_K f(kx)\,dk$$

とおくと、$F(e) = \int_K f(k)dk = f(e) = 1$.
このとき F は zonal spherical function だから $F(x) = \varphi_\lambda(x)$ $(x \in G)$ である。このとき、

$$(\gamma_\lambda \varphi_\lambda)(x) = (\gamma_\lambda F)(x) = \int_K (\gamma_\lambda f)(kx)\,dk \equiv 0$$

更に，$\psi_\lambda(kan) = e^{(i\lambda-\rho)(\log a)}$ $(k \in K, a \in A, n \in N)$
とおくと，$\mathcal{P}_\lambda \psi_\lambda = \varphi_\lambda$ であるから，

$$0 = \gamma_\lambda \varphi_\lambda = \gamma_\lambda \mathcal{P}_\lambda \psi_\lambda = \psi_\lambda \quad （矛盾）$$

故に（予想A）は（予想C）に帰着された．$\mathfrak{M}_\lambda$ は確定特異点型であることが証明され，従って大島の定理を適用出来る．実際，$SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ においては，大島氏により，上の（予想C）が成り立つことが証明された。

$i\lambda$ が integral のときは $\mathcal{A}(G/K)^{\mathfrak{M}_\lambda}$ は一般には不変部分空間（勿論 non-trivial な）を持つ。例えば，$i\lambda = \rho$ でかつ G/K が hermitian のときは G/K 上の正則関数の全体は不変部分空間であり，その L^p-可積分関数との共通部分を考えることによりハーディー クラスの拡張が得られる。更に，vector bundle の場合にこのような考察をすることによって discrete series 等の具体的な実現と principal series の sub-quotient との関連が明らかにされ，それらの結果から逆に vector bundle に値を持つ関数の不変微分方程式系の解の構造が調べられる。